www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Université d'Orléans

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

CONCOURS 1989 - Option Spéciales C

MATHEMATIQUES

(Durée 4 h - Coefficient 4)

Le soin apporté aux calculs à effectuer, ainsi que la rigueur du raisonnement seront des éléments très importants d'appréciation.

PRELIMINAIRES

Toutes les variables aléatoires réelles qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé : $(\Omega, \mathcal{B}, p)$.

Pour $a > 0$, une variable aléatoire réelle X suit une loi de Cauchy de paramètre a, si elle admet comme densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \frac{a}{\pi.(x^2 + a^2)}$$

On désignera, par la suite, par $\mathcal{C}(a)$ une telle loi.

PREMIERE PARTIE

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{C}(a)$.

1°) Préciser la fonction de répartition de X, et montrer que X n'admet pas d'espérance.

2°) Soit Y la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$Y(\omega) = \ln|X(\omega)|$ si $X(\omega) \neq 0$, et $Y(\omega) = 0$ si $X(\omega) = 0$

a) Déterminer une densité de Y.

b) Montrer que Y a une espérance, et la calculer. Pour cela, il pourra être utile de comparer :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,.\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,.\,dx$$

3°) Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^n}\,.\,dx$

a) Etablir l'existence de I_n et de J_n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n

c) Etablir une relation entre J_{n+1}, J_n et I_n.

d) Préciser les valeurs de J_2 et J_3.

DEUXIEME PARTIE

4°) Soit $V = (X,Y)$ un couple aléatoire admettant comme densité sur $\mathbb{R}^2$ la fonction g définie par :

$g(x,y) = \frac{1}{\pi}$ si $x^2 + y^2 \leqslant 1$ et $g(x,y) = 0$ sinon.

Soit Z la variable définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$Z(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad \text{si } X(\omega) \neq 0 \text{ et } Z(\omega) = 0 \text{ si } X(\omega) = 0.$$

Montrer que Z suit une loi $\mathcal{C}(1)$.

Tournez la page S.V.P.

5°) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Soit Z la variable définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$Z(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad \text{si } X(\omega) \neq 0 \quad \text{et} \quad Z(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad X(\omega) = 0.$$

Montrer que Z suit une loi $\mathcal{C}(1)$.

6°) Soit $a > 0$ et $W = (X,Y)$ un couple aléatoire admettant comme densité sur $\mathbb{R}^2$ la fonction h définie par :

$$h(x,y) = \frac{a}{2\pi} \cdot (a^2+x^2+y^2)^{-3/2}$$

Déterminer les lois de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?

TROISIEME PARTIE

7°) Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$, et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{C}(a)$. Déterminer la loi de la variable $Y = \lambda.X$.

8°) a) Soient x,t et b dans $\mathbb{R}$, et $c = [x^2 + (b+1)^2].[x^2 + (b-1)^2]$.

Vérifier que :

$$\frac{c}{[(t-x)^2+1].[t^2+b^2]} = x \cdot \left[\frac{2.t}{t^2+b^2} - \frac{2.(t-x)}{(t-x)^2+1}\right] + \frac{(x^2+b^2-1)}{(t-x)^2+1} + \frac{(x^2-b^2+1)}{t^2+b^2}$$

b) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi $\mathcal{C}(a)$ et Y suivant une loi $\mathcal{C}(b)$; et soit $S = X + Y$. Montrer que S suit une loi $\mathcal{C}(a+b)$; pour cela on commencera par supposer que $a = 1$ et on utilisera ce qui précède.

c) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi $\mathcal{C}(1)$.

Soit : $S_n = \dfrac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{n}$

Préciser quelle est la loi de S_n.

Calculer $P(|S_n| > 1)$; ce résultat vous surprend-t-il ?

QUATRIEME PARTIE

9°) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et ayant la même loi $\mathcal{C}(1)$. Soit L la variable aléatoire définie pour $\omega \in \Omega$ par

$L(\omega) = \ln|X(\omega).Y(\omega)|$ si $X(\omega) \neq 0$ et $Y(\omega) \neq 0$, et $L(\omega) = 0$ si $X(\omega) = 0$ ou $Y(\omega) = 0$.

En utilisant les calculs du 2°), montrer que L admet comme densité la fonction K définie par :

$$K(x) = \frac{2.x}{\pi^2.\mathrm{sh}(x)} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad K(0) = \frac{2}{\pi^2}$$

10°) Utiliser le 9°) pour en déduire la convergence et les valeurs des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \cdot dx \qquad \text{et} \qquad I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \cdot dx$$

On pourra admettre, à défaut de calcul, pour la suite que $I = \dfrac{\pi^2}{8}$.

11°) a) Pour $x \in]0,1[$ on pose $\phi(x) = \dfrac{x.\ln(x)}{(x-1)}$

Montrer que ϕ, ainsi définie, est bornée sur $]0,1[$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$; vérifier que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} [x^{2k}.\ln(x)] + [\phi(x)] . \frac{x^{2n+1}}{x+1}$$

c) Grâce à une majoration, montrer que :

Tournez la page S.V.P.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left[x^{2n+1} \cdot \phi(x) \cdot \frac{dx}{x+1} \right] = 0$$

d) En déduire que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

e) En déduire la somme de la série : $s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

12°) Utiliser une technique analogue à celle décrite dans 11°) pour calculer :

$$M_1 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} \cdot dx$$

Puis en déduire : $M_2 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1} \cdot dx$

CINQUIEME PARTIE

13°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t.x)}{(1+t^2)} \cdot dt$

a) Montrer qu'on définit ainsi une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \neq 0$ $F(x) = 2.\psi(x).x^{-2}$

avec $\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t.x)}{(1+t^2)^3} \cdot [1-3.t^2].dt$

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t.\sin(t.x)}{(1+t^2)^3} \cdot [1-3.t^2].dt$

Soit $h \in \mathbb{R}^*$ et $\Delta(h) = \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \theta(x)$

Appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à cos, pour montrer l'existence d'une constante $C \geq 0$ (indépendante de x et de h) telle que :

$|\Delta(h)| \leq C.|h|$

Conclure que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $\psi' = \theta$.

d) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$\psi'(x) = x.\left[\frac{3}{2} \cdot F(x) - G(x)\right]$

où $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t.x)}{(1+t^2)^2} \cdot dt$

Par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus, prouver que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pout tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t.\sin(t.x)}{(1+t^2)^2} \cdot dt$

e) Conclure que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on a : $F''(x) = F(x)$.

14°) a) Montrer l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on ait :

$$F(x) = A.e^{-|x|}$$

b) Soit $\varepsilon \in]0,2\pi[$ et $u = \frac{1}{\tan(\varepsilon/4)}$

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\left| \int_u^{+\infty} \frac{(1-\cos(t.x))}{(1+t^2)} \cdot dt \right| \leq (\varepsilon/2)$$

c) En remarquant que : $|1-\cos(t.x)| \leq |t.x|$, montrer que :

$$\left| \int_0^u \frac{(1-\cos(t.x))}{(1+t^2)} \cdot dt \right| \leq \left| \frac{x}{2} \right| . \ln(1+u^2)$$

d) Conclure que F est continue en 0, et préciser A.

15°) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{C}(a)$, et soit y dans $\mathbb{R}$.

Préciser $\phi_X(y) = E(e^{i.y.X})$: espérance de la variable aléatoire $Y = e^{i.y.X}$.

Examiner alors si ce résultat est en accord avec celui obtenu à la question 8°),b) ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail